数理解析研究所講究録
632巻 1987年 1-16

或種のアフィン対称空間のコンパクト化とその応用

上智大 理工学部 金行壮二 (Soji Kaneyuki)

半単純アフィン対称空間の局所的分類は1957年 M. Berger [1] によりなされた。それ以後幾何学の分野でのそれの大域的研究はまだあまり多くない。しかし1970年代の終り頃から調和解析の分野ではアフィン対称空間は重要な舞台になってきており、大域的な幾何学的研究の必要性も高まってきている様に思う。Berger の表によると単純アフィン対称空間は約150個もあるので、それらを共通の性質をもついくつかの類に分けて研究するのが便利であろう。ここでは対称R空間と関連するアフィン対称空間について考察しよう。詳しくは [5] に発表の予定である。

§1 アフィン対称空間 M

コンパクトなリーマン対称空間 $M^{\sim}$ を考えよう。その運動群の連結成分を K とすると、$M^{\sim}$ はリーマン対称商空間 K/K' (K' は固定部分群) と表わされる。$M^{\sim}$ に、K を真に

含む連結半単純リー群 G が効果的に働く時，M^- を対称R空間という．Gが単純の時，M^- を単純対称R空間という．対称R空間は局所的には単純対称R空間の積に同型になる．ある単純対称R空間の局所同型類の中で一番下にある空間を今後単に単純対称R空間ということにすると，これらは（重複を許して）次の7つのタイプに分けられる：

1) 体$\mathbb{F}$上のグラースマン多様体 $G_{p,q}(\mathbb{F})$，$p \le q$ かつ $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 又は4元数体 $\mathbb{H}$．これは $\mathbb{F}^{p+q}$ 内の p 次元平面全体である．

2) コンパクト既約対称エルミット空間

3) シロフ型 —— 柱状既約対称有界領域のシロフ境界となるもの

4) 階数1のコンパクト既約対称空間

5) 群多様体 $U(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$

6) 実二次曲面 $Q_{p+1,q+1}(\mathbb{R})$ —— これは実射影空間 P^{p+q+1} 内で斉次座標に関して $x_1^2 + \cdots + x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q+2}^2 = 0$ で定義される超曲面

7) その他 $G_{2,2}(\mathbb{H})/\mathbb{Z}_2$, $SU(8)/Sp(4)\cdot\mathbb{Z}_2$

単純対称R空間 M^- の余接束 $M = T^*M^-$ は単純アフィン対称空間の構造をもつことが知られている．この様なMが

我々の対象である. 以下 M^- と M 及び M^- の非コンパクト双対対称リーマン空間 M^* を列挙しておこう.

（表 1）

M	M^-	M^*
$\dfrac{SL(p+q,\mathbb{F})}{S(GL(p,\mathbb{F})\times GL(q,\mathbb{F}))}$	$G_{p,q}(\mathbb{F})$	$\begin{cases} \dfrac{SO(p,q)}{S(O(p)\times O(q))}, & \mathbb{F}=\mathbb{R} \\ \dfrac{SU(p,q)}{S(U(p)\times U(q))}, & \mathbb{F}=\mathbb{C} \\ \dfrac{Sp(p,q)}{Sp(p)\times Sp(q)}, & \mathbb{F}=\mathbb{H} \end{cases}$
$SO(n,n)/GL(n,\mathbb{R})$	$SO(n)$	$SO(n,\mathbb{C})/SO(n)$
$SU(n,n)/SL(n,\mathbb{C})\cdot\mathbb{R}^*$	$U(n)$	$GL(n,\mathbb{C})/U(n)$
$Sp(n,n)/GL(n,\mathbb{H})$	$Sp(n)$	$Sp(n,\mathbb{C})/Sp(n)$
$SO(2n,\mathbb{C})/GL(n,\mathbb{C})$	$SO(2n)/U(n)$	$SO(n,\mathbb{H})/U(n)$
$SO(2n,\mathbb{H})/GL(n,\mathbb{H})$	$U(2n)/Sp(n)$	$GL(n,\mathbb{H})/Sp(n)$
$Sp(n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{R})$	$U(n)/O(n)$	$GL(n,\mathbb{R})/O(n)$
$Sp(n,\mathbb{C})/GL(n,\mathbb{C})$	$Sp(n)/U(n)$	$Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$
$\dfrac{SO(p+1,q+1)}{SO(p,q)\cdot\mathbb{R}^*}$	$Q_{p+1,q+1}(\mathbb{R})$	$\dfrac{SO(p,1)\times SO(q,1)}{SO(p)\times SO(q)}$
$SO(n+2,\mathbb{C})/SO(n,\mathbb{C})\cdot\mathbb{C}^*$	$Q_n(\mathbb{C})$	$SO(n,2)/SO(n)\times SO(2)$

M	M^-	M^*
$(E_6^1,\ \mathfrak{so}(5,5)+\mathbb{R})$	$G_{2,2}(\mathbb{H})/\mathbb{Z}_2$	$Sp(2,2)/Sp(2)\times Sp(2)$
$(E_6^4,\ \mathfrak{so}(1,9)+\mathbb{R})$	$P_2(\mathbb{O})$	$F_4^2/SO(9)$
$(E_6^{\mathbb{C}},\ \mathfrak{so}(10,\mathbb{C})+\mathbb{C})$	$E_6/Spin(10)\cdot T^1$	$E_6^3/Spin(10)\cdot T^1$
$(E_7^1,\ E_6^1+\mathbb{R})$	$SU(8)/Sp(4)\cdot\mathbb{Z}_2$	$SL(4,\mathbb{H})/Sp(4)$
$(E_7^3,\ E_6^4+\mathbb{R})$	$T^1\cdot E_6/F_4$	$\mathbb{R}^+\cdot E_6^4/F_4$
$(E_7^{\mathbb{C}},\ E_6^{\mathbb{C}}+\mathbb{C})$	$E_7/E_6\cdot T^1$	$E_7^3/E_6\cdot T^1$

ここに $S(\quad)$ は $(\quad)$ 内の行列で行列式1のもの全体，但し4元数行列の場合はその複素表現の行列式のいみとする．$Q_n(\mathbb{C})$ は複素射影空間 $P^{n+1}(\mathbb{C})$ 内の複素2次曲面，$P_2(\mathbb{O})$ は8元数射影平面を夫々表わす．例外型については大域的な商空間の形がわからないので，リー環の組で書いておいた．

注意　我々の M は，対称R空間の言葉で定義したが，パラエルミット対称空間と呼ばれる擬リーマン対称空間としての intrinsic な定義の仕方もある [3]．

§2　Mの同変コンパクト化

我々の対象とするアフィン対称空間 M をリー環論的に構成することを初めに述べよう．$\mathfrak{g}$ を単純リー環，σ を $\mathfrak{g}$ の対

合とし，σで固定される元全体のなす$\mathfrak{g}$の部分環を$\mathfrak{k}$とする。この時$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$を単純対称組という。単純対称組$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$に対して今後つねに，次の条件(C)を課する：

(C) $\mathfrak{k}$の元Zが存在して，$\mathrm{ad}\,Z$の固有値は$0, \pm 1$のみ，かつ$\mathfrak{k}$はZの中心化環と一致する。

$\mathfrak{g}$はσにより$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$と分解する，ここに$\mathfrak{m}$は$\sigma$の$-1$固有空間である。この時$[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$であるから，$\mathfrak{m}$は$\mathrm{ad}\,Z$の$\mathfrak{g}$内での$\pm 1$固有空間$\mathfrak{m}^+$と$\mathfrak{m}^-$（これらは同次元）の和として表わされる。分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}^- + \mathfrak{k} + \mathfrak{m}^+$$

は階別リー環の構造を$\mathfrak{g}$に与へる。逆に任意の単純階別リー環$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} + \mathfrak{g}^0 + \mathfrak{g}^1$に対して対合$\sigma$と，(C)を充す$Z$が存在することが容易にわかる。$G$を$\mathfrak{g}$に対する随伴群とし，$C(Z)$を$Z$の$G$内での中心化群とする。即ち$C(Z) = \{a \in G : (\mathrm{Ad}\,a)Z = Z\}$。この時商空間$M = G/C(Z)$は$\sigma$が引起す対称変換に関してアフィン対称空間になる[4]。この様なMは（表1）ですべて列挙されている。Gの部分群$U^{\pm} = C(Z)\exp\mathfrak{m}^{\pm}$は極大放物型であり，商空間$M^{\pm} = G/U^{\pm}$（$M^+$と$M^-$は多様体としては微分同型）は単純対称R空間になる。Mは$M^{\pm}$の余接束の構造をもつ[13]。

問題1. 直積群$G \times G$のコンパクト商空間$\tilde{M} = M^- \times M^+$の

対角的G作用の下での軌道構造を調べよ. 対角的G作用とはGを$G\times G$の対角線集合と考へた時の, $\tilde{M}$への作用のことである.

<u>注意</u> 実数体$\mathbb{R}$の複素化は$\mathbb{C}=\mathbb{R}1+\mathbb{R}i$ $(i^2=-1)$であるが, $\mathbb{R}$のパラ複素化とでもいうべき多元環$\mathcal{L}=\mathbb{R}\cdot 1+\mathbb{R}j$ $(j^2=1)$を考えよう. これは体ではないが, $\mathbb{C}$の代りに$\mathcal{L}$を基盤とする幾何—パラ複素幾何—が考えられる. その様な試みは古く1952年Libermann [9]によりなされた. 問題1は, コンパクト対称エルミット空間を複素半単純群の商空間として書く時, その群の実形による軌道構造を調べる問題のパラ複素幾何での類似であると云へる.

さてτをσと可換な, $\mathfrak{g}$のカルタン対合とし, 対応するカルタン分解を$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$とする. 但し$\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$は夫々τの$+1$及び-1固有空間である. $\mathfrak{g}$は次の様な分解を許す:

(#) $$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}^*+\mathfrak{m}_\mathfrak{k}+\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}+\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$$

但し, $\mathfrak{k}^*=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}_\mathfrak{k}=\mathfrak{m}\cap\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}=\mathfrak{m}\cap\mathfrak{p}$である. $\mathfrak{m}_\mathfrak{k}$と$\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$は同次元になる. Zを含む$\mathfrak{p}$の極大可換部分空間$\mathfrak{a}$をとる. 条件(C)より$\mathfrak{a}$は$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$に含まれる. この$\mathfrak{a}$は対称有界領域の場合のコンパクトなカルタン部分環に当る. $\mathfrak{g}$の$\mathfrak{a}$に関する制限ルート系をΔとし, Zを零化するルートのなす部分集合をΔ_0とする. これはコンパクトルートに当る. $\mathfrak{g}$の

キリング形式 $(\ ,\ )$ は $\mathfrak{a}$ 上正値だから，Δ を $(\ ,\ )$ に関して $\mathfrak{a}$ の部分集合とみる．Δ の辞書式順序を，$\alpha>0$ ならば $\alpha(Z)\geqq 0$ を充す様に入れておく．そして正(負)ルート全体を Δ^+ (Δ^-) と表はす．この時，

$$\mathfrak{m}^+=\sum_{\alpha\in\Delta^+-\Delta_0}\mathfrak{g}_\alpha\ ,\qquad \mathfrak{m}^-=\sum_{\alpha\in\Delta^--\Delta_0}\mathfrak{g}_\alpha$$

が成立つ．ここに $\mathfrak{g}_\alpha$ は α に対するルート空間である．

$\Delta^+-\Delta_0$ は complementary 正ルート系に当る．(Δ,Δ_0) はある既約対称有界領域のルート系に相似であることが知られている（竹内 [13]）．従って $\Delta^+-\Delta_0$ 内に強直交ルートの極大系 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$ を $\beta_1>\cdots>\beta_r$ かつ β_1 は最高ルート，β_{j+1} は $\beta_1,\cdots,\beta_j$ に強直交するもののうち最高のものとなる様にとる．$\beta_1,\cdots,\beta_r$ で張られる $\mathfrak{a}$ の部分空間を $\mathfrak{a}_0$ とし，$\mathfrak{a}$ から $\mathfrak{a}_0$ への $(\ ,\ )$ に関する正射影を ϖ とすると，$\varpi(\Delta^+-\Delta_0)$ は $\frac{1}{2}(\beta_i+\beta_j)$ $(1\leqq i<j\leqq r)$ なる元から成るか又は $\frac{1}{2}(\beta_i+\beta_j)$ $(1\leqq i\leqq j\leqq r)$ なる元及び $\frac{1}{2}\beta_i$ $(1\leqq i\leqq r)$ なる元の両方から成るかのいずれかである（[11]）．前者が起る場合 Δ は第1種，後者の場合 Δ は第2種ということにする．G に対して二重剰余類分解 $G=\coprod_{\ell=0}^{r}U^-a_\ell U^+$ が成立つ（[14]）；a_0 は単位元，a_ℓ $(\ell\geqq 1)$ は $\beta_1,\cdots,\beta_\ell$ により定まる G のある元である．商空間 $M^\pm$ の原点を $o^\pm$ とし，M_ℓ を対角的 G 作用の下での点 $(o^-,a_\ell o^+)$ を通る軌道とする．向

題1に対して次の定理が成立つ.

<u>定理1.</u> 1) $\tilde{M}$の, 対角的G作用の下での軌道分解は

$$\tilde{M} = \coprod_{l=0}^{r} M_l$$

で与へられる. そして $\dim M_l \geqq \dim M_{l+1}$ が成立つ.

2) $M_0 = M$ であり, かつ M_0 はたゞ1つの開軌道である(特に$\tilde{M}$はMのコンパクト化になる).

3) $l \leqq l'$ ならば閉包 $\overline{M_l}$ は $M_{l'}$ を含む.

4) 各 M_l は M^- 上の纖維束である.

5) M_r はたゞ1つの閉軌道であり, Δが才1種なら $M_r = M^-$; Δが才2種ならば, M_r は M^-上の, ある対称R空間B_rを纖維とする纖維束になる. (表1)における対称空間M^-のうち(表2)のM^-に対しては, M_r は対応する B_rを纖維とする纖維束になる, それ以外はつねに$M_r = M^-$となる:

(表 2)

M^-	B_r
$G_{m,n-m}(\mathbb{F})$, $1 \leqq m \leqq [\frac{n}{2}]$, $n \neq 2m$	$G_{m,n-2m}(\mathbb{F})$
$SO(2n)/U(n)$, $n \geqq 4$, n=奇数	$P_n(\mathbb{C})$
$SO(n)$, $n \geqq 4$, n=奇数	$P_n(\mathbb{R})$
$E_6/Spin(10)\cdot T^1$	$Q_8(\mathbb{C})$
$G_{2,2}(\mathbb{H})/\mathbb{Z}_2$	$Q_{5,5}(\mathbb{R})$
$P_2(\mathbb{O})$	S^8 (8次元球面)

<u>注意</u> 定理1を，対称有界領域 D の通常の実現における D の閉包の正則自己同型群による軌道構造と比較してみると興味深い．D の rank をアフィン対称空間 M の split rank（これが r に等しいことが後でわかる）に，D のシロフ境界を M_r に夫々対比させよ．D の制限ルート系が C 型か BC 型であるかがシロフ境界の構造に影響を与える（[7]）．このことと定理1の 5) を比べよ．

§3. M 及び M^* の実現

3.1. 今迄の記号を踏襲する．$\mathfrak{m}^+$ から M^- への写像 ξ_1 及び $\mathfrak{m}^-$ から M^+ への写像 ξ_2 を夫々 $\xi_1(X)=\exp X\cdot o^-$, $\xi_2(Y)=\exp Y\cdot o^+$ により定義する．ξ_1, ξ_2 は埋込である．$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^++\mathfrak{m}^-$ から $\tilde{M}$ への埋込 $\xi=\xi_1\times\xi_2$ を考へよう．像 $\mathcal{E}=\xi(\mathfrak{m})$ は $\tilde{M}$ の稠密な開集合であるが，開軌道 $M_0=M$ は $\mathcal{E}$ に完全には含まれない．従って $\mathfrak{m}$ の開集合 $\mathcal{D}(M)=\xi^{-1}(\mathcal{E}\cap M)$ は（M 自身の実現ではなく）稠密開集合 $\mathcal{E}\cap M$ の実現でしかない．しかしこれは対称有界領域の *Harish-Chandra* の実現の類似と考へられる．

<u>問題2</u> $\mathcal{D}(M)$ を具体的に決定せよ．

これの答を述べる前に，$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^++\mathfrak{m}^-$ から $End\,\mathfrak{m}^+$ への作用

素 $\mathcal{K}$ を次式により定義する (Koecher [6]):

$$\mathcal{K}(X,Y) = 1 - \mathrm{ad}_{\mathfrak{m}^+}[X,Y] + \frac{1}{4}(\mathrm{ad}\,X)^2(\mathrm{ad}\,Y)^2\Big|_{\mathfrak{m}^+}$$

問題2に対して次の定理を得る.

<u>定理2</u>*) $\mathcal{D}(M) = \{(X,Y) \in \mathfrak{m} : \det \mathcal{K}(X,Y) \neq 0\}$

が成立つ.

この定理の証明のあらましを述べよう. M^- (又は M^+) 上の G の作用を ξ_1 (又は ξ_2) によりベクトル空間 $\mathfrak{m}^+$ (又は $\mathfrak{m}^-$) 上へうつすと, G は $\mathfrak{m}^+$ (又は $\mathfrak{m}^-$) 上に双有理変換として働く (Loos [10]). 点 $X \in \mathfrak{m}^+$, $Y \in \mathfrak{m}^-$ での $g \in G$ の作用を $g(X)$, $g(Y)$ で表わす. 但し, $g(X)$, $g(Y)$ は X, Y が双有理変換 g の定義域に入っている時のみ定義される. 元 $g \in G$ の, $\tilde{M}$ 上の対角的作用にち同変な $\mathfrak{m}$ 上の作用は $g(X,Y) = (g(X), g(Y))$ で与へられる. $g(X)$, $g(Y)$ が定義されていれば, g の作用の微分 g_{*X}, g_{*Y} が定義され非退化であることに注意しておこう.

<u>定理3</u> $g \in G$, $(X,Y) \in \mathfrak{m}$ とする. もし $g(X)$, $g(Y)$ が定義されていれば, 次式が成立つ:

$$\mathcal{K}(g(X), g(Y)) = g_{*X}\, \mathcal{K}(X,Y)\, (g_{*Y})^{\#}.$$

ここに $\#$ は $\mathfrak{g}$ のキリング形式に関する随伴を表わす ($\mathfrak{m}^+$ と $\mathfrak{m}^-$ はキリング形式に関して互いに双対である).

---

*) この結果は O. Loos も得ていることが最近知らされた. しかし問題意識, 証明方法共に我々のと異なる.

$\mathcal{D}(M)$は，$\mathfrak{m}$上の双有理的G作用の下での$\mathfrak{m}$の原点(o_1, o_2)の打切り軌道になっている．これを

(*) $$\mathcal{D}(M) = G\cdot(o_1, o_2) \qquad (\text{打切り})$$

と表わす．打切り軌道とは，(o_1, o_2)で定義される様なGの変換のみによる(o_1, o_2)の像点全体の集合のことである．

さて$\alpha \in \Delta^+$とし，ルート空間$\mathfrak{g}_\alpha$のベクトル$E_\alpha \neq 0$を$(E_\alpha, \tau E_\alpha) = -2(\alpha,\alpha)^{-1}$が成立つ様に選ぶ．この時$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = 2(\alpha,\alpha)^{-1}\alpha$が成立つ．$E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$を$E_{-\alpha} = -\tau E_\alpha$により定義する．各強直交ルート$\beta_i$に対して，$E_{\beta_i}$, $E_{-\beta_i}$を夫々E_i, E_{-i}と略記する．$\mathfrak{m}$の部分空間$\mathfrak{c}$を

$$\mathfrak{c} = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}(E_i + E_{-i})$$

で定義する．$\mathfrak{c}$は$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$の極大可換部分空間であることが示される．$\mathfrak{c}$は対称リーマン空間のカルタン部分環に当るもので，アフィン対称空間Mのカルタン部分環と呼ぶ．各強直交ルートβ_iに対して，$H_i = 2(\beta_i,\beta_i)^{-1}\beta_i$, $X_i = E_i + E_{-i}$, $Y_i = E_i - E_{-i}$とおく．又$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$の基底$h = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$をとる．$\varphi_i(h) = H_i$, $\varphi_i(x) = X_i$, $\varphi_i(y) = Y_i$とおいて定義される$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$から$\mathfrak{g}$への写像$\varphi_i$ $(1 \leq i \leq r)$は互いに可換な単射準同型である．これを用いると$\exp\sum_{i=1}^{r} t_i X_i$の点$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i X_i$

$\in \mathfrak{m}$ での ξ 同変作用が計算できて

$$\left(\exp \sum_{i=1}^{r} t_i X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i \operatorname{ch} t_i + \operatorname{sh} t_i}{\lambda_i \operatorname{sh} t_i + \operatorname{ch} t_i} X_i$$

で与へられる。これより

<u>補題1.</u> G の部分群 $C = \exp \mathfrak{c}$ による, $\mathfrak{m}$ の原点 (o_1, o_2) の軌道は r 次元開立方体 $\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i \in \mathfrak{c} : |\lambda_i| < 1 \}$ になる.

ところで $(X, Y) \in \mathfrak{c}$ の時 $K(X, Y)$ は各ルート空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta^+ - \Delta_0$) を不変にし, その上でスカラーになることがわかり, そのスカラーはルートの計算ですべて求めうる. 以上から次の命題をうる.

<u>命題1</u> (X, Y) が軌道 $C(o_1, o_2)$ の閉包に属するとしよう. この時 $K(X, Y)$ のすべての固有値は非負である. 更に (X, Y) が $C(o_1, o_2)$ に属するための必要十分条件は $K(X, Y)$ のすべての固有値が正なることである.

<u>定理2の証明について</u> 包含 $\subset$ は定理3と $(*)$ から直ちにえられる. $\mathfrak{k}$ が生成する G の極大コンパクト群を K とすると, 分解 $G = KCC(Z)$ が成立つ [2]. これより

$$\mathfrak{m} = K \cdot \overline{C(o_1, o_2)} \qquad (\text{打切り})$$

がえられる. これと命題1, $(*)$, 定理3より逆向きの包含をうる.

3.2. $\mathfrak{g}$ の分解(#)の中の2つの部分環

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^* + \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}\ ,\qquad \mathfrak{g}^* = \mathfrak{k}^* + \mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}$$

を考へよう. 対称R空間の理論より $M^- = G/U^- = K/K'$, $K' = K \cap U^-$ (Lie $K' = \mathfrak{k}^*$) と表わされ, K/K' はコンパクト対称商空間としての表示である. K は1次元の中心をもちうることに注意しておこう. $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}^*)$ はコンパクト対称対 $(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}^*)$ に双対な非コンパクト対称対である[12]. G^*, K^* を G 内で $\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}^*$ が生成する連結リー部分群とすると $M^* = G^*/K^*$ は非コンパクト単連結で M^- に双対な対称リーマン空間である. これは(表1)で与へられている. $\mathfrak{c}$ は M^* のカルタン部分環にもなっている. $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^+ + \mathfrak{m}^-$ 内で $(X, -\tau X)$, $X \in \mathfrak{m}^+$ なる形の元全体のなす部分空間である. $\mathfrak{g}$ の正値な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\langle X, Y \rangle = -(X, \tau Y)$ $X, Y \in \mathfrak{g}$ により定義する. $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}$ の元 $(X, -\tau X)$ に対して $ad_{\mathfrak{m}^+}[X, -\tau X]$ は $\langle\ ,\ \rangle$ に関して対称な作用素なることがわかる.

定理4 1) M^* は M の原点の G^* 軌道として M 内に埋込まれる. その埋込を i とすると, 次の可換図が成立つ.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[dd] & \tilde{M} \arrow[dd] & \mathfrak{m} \arrow[l, "\xi"'] \arrow[dd] \\
M^* \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i^-"'] & & & \\
 & M^- \arrow[r, "id"] & M^- & \mathfrak{m}^+ \arrow[l, "\xi_1"']
\end{tikzcd}$$

ここに $\tilde{i}$ は定理1で与へられた $M=M_0$ なる埋込，i^- は Borel-長野の埋込[12]，縦の矢は自然な射影である．

2) $\tilde{i}i(M^*)\subset \xi(\mathfrak{m})$ が成立つ．$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}$ の有界領域

(**) $$\mathcal{D}(M^*)=\{(X,-\tau X)\in \mathfrak{m}_{\mathfrak{g}} :\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{m}^+}[X,-\tau X]<2\}$$

を考へると，M^* は微分同型 $\xi^{-1}\tilde{i}i$ により $\mathcal{D}(M^*)$ にうつる．

3) M が G 不変複素構造をもつ時，$M^*, M^+, M^-, \mathfrak{m}, \mathfrak{m}^+$ はすべて複素構造をもち，1)の図式のすべての写像は正則になる．

注意　M^* の $\mathcal{D}(M^*)$ としての表示は Langlands [8] による対称有界領域の実現の一般化になっている．尚(**)と本質的に同値な，M^* の別の表示は竹内[13]でも与へられているが，そこでは複素の場合の Moore [11] の結果を使って証明がなされている．我々の方法は実，複素の区別なしに統一的に行われる．

例1　$M=T^*G_{p,q}(\mathbb{R})$, $p\leq q$ の場合を考へよう(表1参照)．この時 $\mathfrak{m}^+, \mathfrak{m}^-$ は夫々行列

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{p}{\longleftrightarrow} & \overset{q}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix}$$

の全体で与へられる．$\mathfrak{m}^+, \mathfrak{m}^-$ を夫々実 (p,q) 行列又は (q,p) 行列全体 $M_{p,q}$, $M_{q,p}$ と同一視する．$(X,Y)\in M_{p,q}\times M_{q,p}=\mathfrak{m}$ に対して $K(X,Y)$ は

$$\mathcal{K}(X,Y)W = (1-XY)W(1-YX) \qquad W \in M_{p,q}$$

なる1次変換で与へられる。これより

$$\mathcal{D}(M) = \{(X,Y) \in M_{p,q} \times M_{q,p} : \det(1-XY) \neq 0\}$$

が得られる。行列 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(p+q,\mathbb{R})$ の与同変作用は

$$(X,Y) \mapsto ((AX+B)(CX+D)^{-1}, (DY+C)(BY+A)^{-1})$$

で与へられる。M^*の有界領域としての実現は

$$\mathcal{D}(M^*) = \{(X, {}^tX) \in M_{p,q} \times M_{q,p} : X\,{}^tX < 1\}$$

となる。

文献

1 M. Berger, Les espaces symétriques non compacts, Ann. Sci. École Norm. Sup. 74(1957), 85-177.

2 M. Flensted-Jensen, Spherical functions on a real semisimple Lie group, A method of reduction to the complex case, J. Funct. Anal. 30(1978), 106-146.

3 S. Kaneyuki, M. Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math. 8(1985), 81-98.

4 S. Kaneyuki, On classification of parahermitian symmetric spaces, to appear in Tokyo J. Math. 8(2)(1985).

5. S. Kaneyuki, Compactifications of a class of affine symmetric spaces, Preprint

6 M. Koecher, Über eine Gruppe von rationalen Abbildungen, Invent. Math. 3(1967), 136-171.

7 A. Koranyi, J.A. Wolf, Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half-planes, Ann. of Math. 81(1965), 265-288.

8 R.P. Langlands, The dimension of the space of automorphic forms, Amer. J. Math. 85(1963), 99-125.

9 P. Libermann, Sur les structures presque paracomplexes, C.R. Acad. Sci. Paris 234(1952), 2517-2519.

10 O. Loos, Bounded Symmetric Domains and Jordan Pairs, Math. Lect., Univ. Calif., Irvine, 1977.

11 C.C. Moore, Compactifications of symmetric spaces II: The Cartan domains, Amer. J. Math. 86(1964), 358-378.

12 T. Nagano, Transformation groups on compact symmetric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 118(1965), 428-453.

13 M. Takeuchi, Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 12 (1965), 81-192.

14 M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces II, Tsukuba J. Math. 3(1979), 1-29.

15 O. Loos, On algebraic groups defined by Jordan pairs, Nagoya Math. J. 74(1979), 23-66.

付記　定理2を含む次の結果が証明できる：$\xi^{-1}(M_\ell \cap \mathcal{E})$, $0 \leqq \ell \leqq r$ は $\mathrm{rank}\, K(X,Y) = i_\ell$ を充たす点 $(X,Y) \in \mathfrak{m}$ の全体と一致する。ここに i_ℓ はある整数で，$i_0 = \dim \mathfrak{m}^+$ が成立つ。